CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Week 3: Ch.2 Matrices Continue(Linear Equations)

Ch.3 Eigenvector

Today Topics

- Part I Chapt. 2 Matrices
- Break
- Chapter 2: Linear Equations
- Homework 1: Due
- Homework 2 ส่งสัปดาห์หน้า

Chapter 2: Cont

- Last Week
  - Matrix Concept and Notations
  - Types of Matrix
  - Concept of Determinant and Inverse
- This Week
  - More on Determinant and Matrix
  - System of Linear Equations: Homogeneous and Non-homogeneous
  - Eigenvalue/Eigenvector Concept

Determinant

Determinants: $|\mathbf{A}|$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \text{Minor of } a_{11} - a_{12} \cdot \text{Minor of } a_{12} + a_{13} \cdot \text{Minor of } a_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Calculation of Determinant

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot Minor(a_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot Minor(a_{j,l})$$

$$|a| = a, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ j & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ i & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ i & j \end{vmatrix}$$

$$= a(ek - jf) - b(dk - if) + c(dj - ie)$$

$$= aek\text{-}afi - bdk + bfi + cdj - cei, \quad \text{first row expand}$$

$$= -b\begin{vmatrix} d & f \\ i & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

$$= -b(dk - if) + e(ak - ic) - j(af - dc)$$

$$= -bdk + bfi + aek - cei - afj + cdj, \text{ second column expand}$$

คุณสมบัติของ Determinant

1. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
2. $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$
3. $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$
4. $\det(\mathbf{A}^*) = \det(\mathbf{A})^*$
5. $\det(\mathbf{I}) = 1$

คุณสมบัติของ Determinant

6. ถ้ามีการสลับ Row หรือ Column ค่า Determinant ใหม่จะเท่ากับ -1 คูณค่าเดิม

7. ถ้า Matrix $\mathbf{A}$ เป็น Singular หรือ ***Linearly Dependent*** เราจะได้ $|\mathbf{A}| = 0$ อันนี้สามารถนำมาใช้ทดสอบ Non-Singular Matrix ได้

8. ถ้าแถวใดหรือ Column ใดของ Matrix เท่ากับศูนย์ หรือมีสองแถวหรือสอง Column ที่เหมือนกัน หรือเป็นจำนวนเท่าของกัน ค่า Determinant จะเป็นศูนย์

9. ถ้าเราคูณค่าคงที่ให้กับแถวใด หรือ Column ใดของ Matrix ค่า Determinant ที่ได้จะเป็นจำนวนเท่าของค่าคงที่นั้นกับค่า Determinant เดิม

10. ถ้าเราสร้าง Matrix ใหม่ ได้จากการนำค่าคงทีคูณด้วยแถว หรือ Column หนึ่งใดทำการบวกลบกับแถว หรือ Column ที่เหลือ ค่า Determinant ของ Matrix ใหม่จะยังคงเท่ากับ Matrix เดิม

Calculation of Determinant

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot Minor(a_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} a_{j,l} \cdot Minor(a_{j,l})$$

Complexity = O(n!)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ถ้าเราบวกลบ Column เพื่อให้ Element ในแถว(หรือคอลัมน์)
ที่ต้องการขยายเป็นศูนย์หมดยกเว้น Element เดียว
เราจะลงเอยด้วยการคำนวณหา Determinant ของ Matrix
ที่มีขนาดลดลงหนึ่ง

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

การบวกลบดังกล่าวต้องมีหลักการ มิฉะนั้นผลลัพธ์จะไม่ถูกต้อง
เราจะใช้คุณสมบัติข้อ 9 และ 10 ของ Determinant เพื่อกระทำดังกล่าว

Algorithm การหา Determinant ที่มีประสิทธิภาพ

- ใช้คุณสมบัติข้อ 10 ร่วมกับข้อ 9 เพื่อสร้างเป็น Algorithm
  - 1. มองหา Element ใน Matrix ที่มีค่าเท่ากับ 1 ถ้าหาไม่ได้ เลือก Element ใดก็ได้ จากนั้นหารทั้งแถว หรือหารทั้ง Column ด้วยค่าของ Element นั้นเพื่อทำให้ค่าเป็น 1 ตัวเลขที่มาหารนั้นจะต้องกลับนำมาคูณกับคำตอบที่ได้ เป็นค่า Determinant ที่ต้องการ (คุณสมบัติข้อ 9)
  - 2. พิจารณาว่าจะ Expand แบบแถวหรือ Column ผ่าน Element ที่เลือก จากนั้นกำจัด Element อื่นในแนวที่ Expand เป็นศูนย์ให้หมด(คุณสมบัติข้อ 10) สมมุติเราเลือก Element a(x,y)
    - ถ้าจะ Expand แบบแถว ให้บวกลบ Column อื่นกับ Column ที่ผ่าน Element ที่เลือก เพื่อให้ Element ในแถวที่จะ Expand เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้น Element ที่เลือก
      - Col(j) ใหม่ = Col(j) เก่า – a(x,j)*Col(y); j = 1,2,..,n ยกเว้น y
    - ถ้าจะ Expand แบบ Column ให้บวกลบแถวอื่นกับแถวที่ผ่าน Element ที่เลือก เพื่อให้ Element ใน Column ที่จะ Expand เป็นศูนย์ทั้งหมด ยกเว้น Element ที่เลือก
      - Row(i) ใหม่ = Row(i) เก่า – a(i,y)*Row(x); i = 1,2,..,n ยกเว้น x

Algorithm การหา Determinant ที่มีประสิทธิภาพ(ต่อ)

- 3.ทำการ Expand ตามสูตร เราจะลงเอยด้วยการหา Determinant ของ Matrix ที่มีขนาดลดลงหนึ่งเพียงครั้งเดียว
- 4. วิธีนี้สามารถทำเป็น Recursive เพื่อลดการหา Determinant ของ Matrix ขนาดใหญ่เหลือแค่การหา Determinant ของ Matrix 2x2 หรือ 3x3

การหา Determinant

Example 2.1 จงหา Determinant ของ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 7 \\ 8 & -3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Column 3 Expansion
Or Row 2 Expansion

คำตอบ เราจะใช้คุณสมบัติข้อ 10 ที่กล่าวข้างต้น เปลี่ยน Matrix แถวที่ 1, 3 และ 4 ให้มีค่าใน Column ที่ 3 เป็น ศูนย์ จากนั้นหาค่า Determinant ตาม Column ที่ 3 ซึ่งการคำนวณจะลดลงเหลือการหาค่า Determinant ของ Matrix ขนาด 3×3 เท่านั้น

เราสร้าง Matrix $\mathbf{B}$ จาก Matrix $\mathbf{A}$ โดย

สร้างแถวที่หนึ่งใหม่จากการนำ -2 คูณแถวที่สอง ไปบวกกับแถวที่หนึ่งเดิม

สร้างแถวที่สามใหม่จากการนำ -3 คูณแถวที่สอง ไปบวกกับแถวที่หนึ่งเดิม

สร้างแถวที่สี่ใหม่จากการนำ 4 คูณแถวที่สอง ไปบวกกับแถวที่หนึ่งเดิม

ค่า Determinant ของ Matrix ใหม่จะเท่ากับ Matrix เดิม แต่จะคำนวณน้อยกว่าเดิมมากถ้าเรา Expand ตาม Column ที่ 3 ดังนี้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ 20 & -7 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = 0\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{B}| = -1\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ 20 & -7 & 18 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & -17 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 17 \\ -1 & -17 \end{vmatrix} = 34$$

สังเกตว่า ในการหา Determinant ของ Matrix 3×3 ในบรรทัดที่สอง เราใช้วิธีการเดิมในการลดรูป และทำการ Expand ในแถวที่สอง

กรรมวิธีดังกล่าวสามารถทำได้ถ้าใน Matrix มี Element ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ถ้าไม่มี Element ใดเท่ากับหนึ่ง เราสามารถแยก Factor แถวใดแถวหนึ่ง หรือ Column หนึ่งออกมา เพื่อให้ Element หนึ่งมีค่าเป็นหนึ่ง และใช้วิธีการดังกล่าว แต่อย่าลืมคูณค่า Factor ที่แยกออกในผลลัพธ์ที่ได้ (ดูคุณสมบัติข้อ 9)

การหา Determinant

กรรมวิธีดังกล่าวสามารถทำได้ถ้าใน Matrix มี Element ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ถ้าไม่มี Element ใดเท่ากับหนึ่ง เราสามารถแยก Factor แถวใดแถวหนึ่ง หรือ Column หนึ่งออกมา เพื่อให้ Element หนึ่งมีค่าเป็นหนึ่ง และใช้วิธีการดังกล่าว แต่อย่าลืมคูณค่า Factor ที่แยกออกในผลลัพธ์ที่ได้ (ดูคุณสมบัติข้อ 9)

ถ้า Matrix เป็น Diagonal Matrix หรือ ***Upper Triangular*** หรือ ***Lower Triangular*** (คือ มีค่า Element ครึ่งล่างต่ำกว่า Diagonal หรือครึ่งบนสูงกว่า Diagonal เป็นศูนย์หมด ตามลำดับ) ค่า Determinant สามารถคำนวณได้ง่าย จะเท่ากับผลคูณของ Element ใน Diagonal

Inverse of Matrix

2.5 Matrix Inverse

2.5.1 Matrix Inverse:

กำหนด Matrix $\mathbf{A}$ ที่ไม่ใช่ Singular Matrix เราต้องการหา Matrix $\mathbf{B}$ ที่ทำให้ $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ ดังนั้น Matrix $\mathbf{B}$ ที่ได้คือ ***Inverse Matrix*** ของ $\mathbf{A}$ กล่าวคือ $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

ถ้า Matrix เป็น Singular จะไม่มี Inverse ดังนั้น Inverse จะมีได้สำหรับ Non-Singular Matrix เท่านั้น และ Inverse ของ Matrix จะ Unique

Inverse of Matrix

สามารถกระทำได้หลายวิธี ได้แก่

- ใช้วิธีทาง Numerical Method เช่นโดยใช้ Gauss-Jordan Elimination(จะเรียนในภายหลัง)
- Formal Evaluation ซึ่งจะกล่าวในบทนี้

ขั้นตอนการหา Matrix Inverse กระทำดังนี้

1. หา Cofactor ของ Matrix $\mathbf{A}$ โดยแทนค่าทุกๆ element ด้วยค่า Cofactor ของมัน ขั้นตอนนี้จะใช้การคำนวณมากที่สุด เพราะต้องหา Cofactor ของทุกๆ Element

2. Transpose Matrix ที่ได้ในข้อ 1 เราได้ Matrix ใหม่เรียก ***Adjoint*** ของ Matrix $\mathbf{A}$ หรือ $\mathbf{adj\ A}$

3. หาค่า Determinant ของ $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|$

4. คำนวณ Inverse ของ Matrix โดย $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{adj\ A}}{|\mathbf{A}|}$

Inverse of Matrix

Example 2.2 จงหา Inverse ของ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

คำตอบ เราหา Matrix ของ Cofactor ดังนี้

$$\text{Cofactor} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & -7 \\ 9 & 7 & -17 \end{bmatrix}$$

Inverse of Matrix

$$\text{Cofactor} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & -7 \\ 9 & 7 & -17 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราได้ $adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -6 & 5 & 7 \\ 6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$

ทำการหา Determinant ของ Matrix เราได้

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 17 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้น เราได้ $adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -6 & 5 & 7 \\ 6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$

ทำการหา Determinant ของ Matrix เราได้

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 17 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้น

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ -6 & 5 & 7 \\ 6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$

ขอให้นักศึกษาลองตรวจสอบว่า $\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

สาธิตทดลอง Row Expansion

Matrix Norms

2.6 Matrix Norms

สำหรับ Matrix $\mathbf{A}$ ใน $\mathbf{C}^{n\times m}$ เราให้นิยาม ***Norm*** ของ Matrix ดังนี้

$$\left\|\mathbf{A}\right\|_{pq} = \max_{x\in\mathbf{C}^{m},\, x\neq 0} \frac{\left\|\mathbf{A}x\right\|_p}{\left\|x\right\|_q}$$

ในการนี้ Norm $\left\|\cdot\right\|_{pq}$ ได้มาจากสอง Norm คือ $\left\|\cdot\right\|_p$ และ $\left\|\cdot\right\|_q$ ซึ่งมีคุณสมบัติขิง Norm ทั้งสามประการ กล่าวคือ

1. $\left\|\mathbf{A}\right\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ และ $\left\|\mathbf{A}\right\| = 0 \quad \mathit{iff} \;\; \mathbf{A} = 0$

2. $\left\|\alpha\mathbf{A}\right\| = \left|\alpha\right|\left\|\mathbf{A}\right\|, \forall \mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times m}, \forall \alpha\in\mathbf{C}$

3. $\left\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\right\| \leq \left\|\mathbf{A}\right\| + \left\|\mathbf{B}\right\|, \forall \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{C}^{n\times m}$

คุณสมบัติที่สำคัญอีกอันของ Norm ก็คือ $\left\|\mathbf{AB}\right\|_p \leq \left\|\mathbf{A}\right\|_p\left\|\mathbf{B}\right\|_p$

Norm ของ Matrix ที่สำคัญมีดังนี้

Norms

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

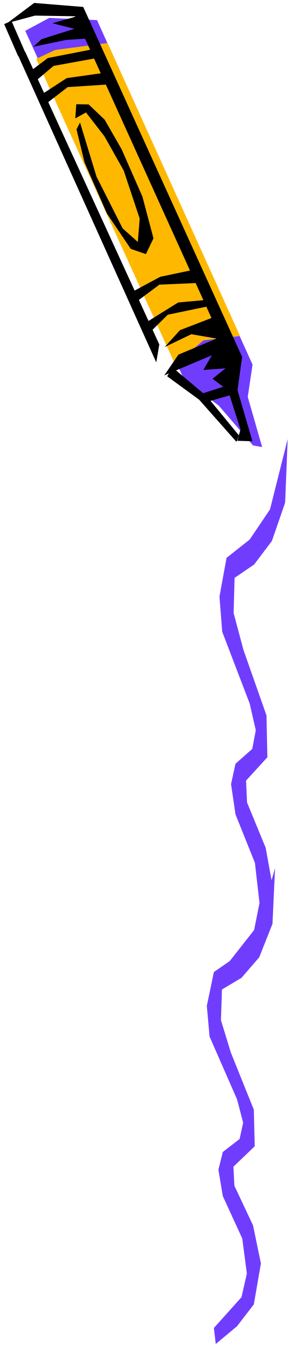
$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left[\rho(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\right]^{1/2} = \left[\rho(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\right]^{1/2}$$

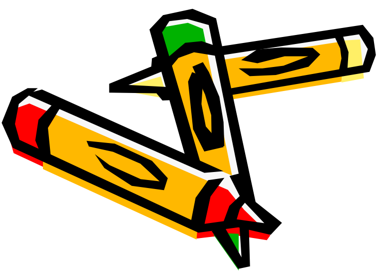
$$\|\mathbf{A}\|_F = \left[trace(\mathbf{A}^H\mathbf{A})\right]^{1/2} = \left[trace(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)\right]^{1/2}$$

ค่า $\rho(\mathbf{X})$ หมายถึงค่า Magnitude ที่มากที่สุดของค่า Eigenvalue ของ $\mathbf{X}$ (Eigenvalue จะกล่าวในบทหน้า)

เรียก Spectral Radius ของ X

Break





System of Linear Equations

พิจารณาจากระบบของ n สมการที่ประกอบด้วย m Unknown ข้างล่าง

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

ระบบดังกล่าวเรียก ***Homogeneous*** เนื่องจากแต่ละสมการเป็น Homogeneous และเราจะเห็นได้ว่า ***Trivial Solution*** ของระบบคือเมื่อ $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ อย่างไรก็ตาม ในกรณีนี้ เราต้องการหา ***Non-Trivial Solution***

ในระบบข้างต้นสามารถเขียนในรูป Matrix ได้เป็น $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ โดยที่

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

System of Linear Equations

สมการดังกล่าวจะมี Non-Trivial Solution เมื่อ $m > rank(\mathbf{A})$ โดยที่ ***Rank*** ของ Matrix หมายถึงจำนวนของ Independent Row ของ Matrix (จำนวนของแถวของ Matrix ที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปของ Linear Combination ของแถวอื่น) และสังเกตว่าในกรณีนี้ จำนวนของ Non-Trivial Solution อาจจะมีได้หลายตัว

การแก้สมการของ Homogeneous Linear Equation สามารถกระทำได้โดยใช้วิธีการ Elimination ของ Coefficient ใน Matrix เช่นใน ***Gauss-Jordan Method*** ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวใน Part III ของวิชานี้

หลักของการ Elimination คือการเปลี่ยนรูป Matrix $\mathbf{A}$ ให้อยู่ในรูปของ ***Reduced Form*** $\mathbf{A}_R$ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. Element ต้น(ที่ไม่เท่ากับศูนย์) หรือ ***Leading Entry*** ของแต่ละแถวที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับหนึ่ง
2. ถ้ามีแถวใด มี Element ต้นอยู่ใน Column k ค่าของ Element ในแถวอื่นๆที่ Column k จะต้องเท่ากับศูนย์
3. ถ้า Row k เป็น ***Zero Row*** และ Row j ไม่ใช่ Zero Row ดังนั้น $j < k$
4. ถ้า Leading Entry ของ Row r_1 อยู่ที่ Column c_1 และ Leading Entry ของ Row r_2 อยู่ที่ Column c_2 และ $r_1 < r_2$ ดังนั้น $c_1 < c_2$

Reduced Matrix

ค่า ***Rank*** ของ Matrix $\mathbf{A}$ เขียน $rank(\mathbf{A})$ จะเท่ากับจำนวนของ ***Nonzero Row*** ใน $\mathbf{A}_R$ ซึ่งเท่ากับจำนวนของ Independent Row ของ Matrix $\mathbf{A}$ และ $rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}_R)$

ต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างของ ***Reduced Matrix***

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ค่า Rank ของ Matrix ข้างบนจะเป็นดังนี้

$$rank(\mathbf{A}_R) = 2, rank(\mathbf{B}_R) = 2, rank(\mathbf{C}_R) = 2, rank(\mathbf{D}_R) = 3,$$

Reduced Matrix

Example 2.3 จงหา Reduced Form และ Rank ของ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

คำตอบ เราใช้วิธีการกำจัด Element ที่ไม่ต้องการทีละ Column ดังนี้

Reduced Matrix

1. กำจัด Element แรกของแถวที่ 3 ออก โดยนำแถวที่ 1 คูณด้วย -3 ไปบวกกับแถวที่ 3 เราได้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2. กำจัด Element ที่ 2 ของแถวที่ 1 ออก โดยนำแถวที่ 1 บวกแถวที่ 2 ไปแทนในแถวที่ 1 เราได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. กำจัด Element ที่ 2 ของแถวที่ 3 ออก โดยนำแถวที่ 2 ลบแถวที่ 3 ไปแทนที่ในแถวที่ 3 เราได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_R$$

เราไม่สามารถ Eliminate ได้อีกต่อไป ฉะนั้น Matrix ที่ได้จะเป็น Reduced Form และในกรณีนี้ เราได้

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}_R) = 2$$

Solutions of Homogeneous

Example 2.4 จงแก้สมการ

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

คำตอบ เราจะใช้หลักการของการ Elimination ดังนี้ จาก $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ทำการกำจัด Element a_{12} และ a_{21} ออก จะได้ Reduced Matrix ของ $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}_R$) ตามขั้นตอนดังนี้

Solutions of Homogeneous

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ นำ 2 คูณแถวที่ 1 บวกกับแถวที่ 2 ไปแทนแถวที่ 2 เดิม

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ หารแถวที่สองด้วย -5 ตลอด

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ นำแถวที่สองคูณด้วย 3 บวกกับแถวที่ 1 แทนที่แถวที่ 1 เดิม

ดังนั้น Solution จะเป็น $x_1 = -\frac{7}{5}x_3$ และ $x_2 = \frac{1}{5}x_3$ โดยที่ x_3 จะเป็นค่าอะไรก็ได้ กล่าวคือเราได้คำตอบในลักษณะของอัตราส่วน ซึ่งเราเรียก ***General Solution*** ของระบบ

Solutions of Homogeneous

ปกติเรามักเขียนคำตอบในรูปความสัมพันธ์ ในลักษณะ Column Matrix ดังนี้

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{5}x_3 \\ \frac{1}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \alpha \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\ \alpha = x_3 / 5 \text{ จะมีค่าอะไรก็ได้})$$

Non-homogeneous Systems

2.7.2 Nonhomogeneous Systems of Linear Equations

ในกรณีนี้ เราจะพิจารณา ***Nonhomogeneous Linear System*** ในรูปของ

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ เป็น Matrix ขนาด $n \times m$ ของตัวเลข, $\mathbf{X}$ เป็น Matrix ขนาด $m \times 1$ ของ Unknown ที่ต้องการหา และ $\mathbf{B}$ เป็น Matrix ขนาด $n \times 1$ ของตัวเลข ในกรณีของเราจะสมมุติว่าตัวเลขทั้งหมดเป็น Real Number (สำหรับ Complex Number จะใช้หลักการเหมือนกัน)

การแก้สมการของ Nonhomogeneous Linear Equation จะคล้ายกับ Homogeneous แต่ในการ Elimination นั้นจะต้องคำนึงถึงค่าใน $\mathbf{B}$ ด้วย ในการนี้ เวลาเราทำ Elimination เรานิยมเขียน $\mathbf{A}$ ต่อกับ $\mathbf{B}$ เพื่อความสะดวกในรูป

Non-homogeneous Systems

การแก้สมการของ Nonhomogeneous Linear Equation จะคล้ายกับ Homogeneous แต่ในการ Elimination นั้น จะต้องคำนึงถึงค่าใน $\mathbf{B}$ ด้วย ในการนี้ เวลาเราทำ Elimination เรานิยมเขียน $\mathbf{A}$ ต่อกับ $\mathbf{B}$ เพื่อความสะดวกในรูป

$$[\mathbf{A}:\mathbf{B}]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right]$$

สมการ $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ จะมี Solution (เรียก ***Consistent***) เมื่อ $\mathbf{A}$ และ $[\mathbf{A}:\mathbf{B}]$ มี Rank เท่ากัน และถ้าเราพบว่า $\mathbf{U}$ เป็น Solution ของสมการ $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ดังนั้นทุกๆ Solution ของ $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ จะอยู่ในรูป $\mathbf{U}+\mathbf{H}$ โดยที่ $\mathbf{H}$ เป็น ***General Solution*** ของ Homogeneous System $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ (สำหรับการพิสูจน์ในข้ออ้างข้างต้น จะไม่กล่าวรายละเอียด ผู้ที่สนใจ ขอให้หาอ่านได้จากหนังสือ Linear Algebra ทั่วไป)

Non-homogeneous Systems

Example 2.6 จงแก้สมการ หา General Solution ของ

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = -2$$
$$x_2 + 2x_3 = 4$$

คำตอบ นี่คือระบบของ Nonhomogeneous Linear Equation ซึ่งสามารถเขียนในรูป $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

การหา Solution เริ่มจากเราเขียน Matrix $[\mathbf{A} : \mathbf{B}]$ ดังนี้

$$[\mathbf{A} : \mathbf{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

ทำการหา Reduced Form ของ Matrix เราได้

$$[\mathbf{A} : \mathbf{B}]_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Non-homogeneous Systems

ทำการหา Reduced Form ของ Matrix เราได้

$$[\mathbf{A}:\mathbf{B}]_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

ในขณะที่

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า $rank(\mathbf{A}) = 2 = rank([\mathbf{A}:\mathbf{B}])$ ดังนั้นระบบจะมี Solution ในรูปของความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Non-homogeneous Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราได้

$$x_1 - x_3 = 6$$
$$x_2 + 2x_3 = 4$$

เมื่อย้ายข้าง จะได้

$$x_1 = x_3 + 6$$
$$x_2 = -2x_3 + 4$$

และ Solution จะเป็น

Non-homogeneous Systems

$$x_1 = x_3 + 6$$
$$x_2 = -2x_3 + 4$$

และ Solution จะเป็น

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_3 + 6 \\ -2x_3 + 4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ x_3 จะมีค่าใดก็ได้ ดังนั้นเราสามารถเขียน General Solution ได้เป็น

$$\mathbf{X} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เทอม $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะเป็น ***General Solution*** ของ Homogeneous System ของ $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ และเทอม $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ เราเรียกว่าเป็น ***Particular Solution*** ของ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (ซึ่งเป็น Solution หนึ่งของระบบเมื่อ $\alpha = 0$)

2.7.3 Uniqueness ของ Nonhomogeneous Systems of Linear Equations

ถ้า $\mathbf{A}$ ใน $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ เป็น Matrix ขนาด $n\times n$ ระบบจะมี Unique Solution ก็ต่อเมื่อ $rank(\mathbf{A})=n$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ $\mathbf{A}$ ไม่เป็น Singular (คือมี Determinant ไม่เท่ากับศูนย์ หรือมี Inverse)

ในกรณีดังกล่าว Solution ของสมการสามารถหาได้จากการคูณด้วย $\mathbf{A}^{-1}$ ทั้ง 2 ข้าง กล่าวคือ จาก $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ เราได้ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ หรือ $\mathbf{I}_\mathbf{n}\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ หรือ $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ อย่างไรก็ตาม การแก้สมการ โดยการคูณด้วย Inverse จะใช้การคำนวณค่อนข้างมากในการหา Inverse วิธีที่นิยมมากกว่าคือขบวนการ Elimination ซึ่งรายละเอียดของ Algorithm จะกล่าวใน Part III

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=c_2 \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=c_n
\end{matrix}
=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}
=\mathbf{AX}=\mathbf{C}
$$

CPE 332

Computer Engineering Mathematic II

PART I: Linear Algebra

(Chapter 1-3)

Chapter 3 Intro

3.1 Introduction

กำหนด $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ และ Column Vector ξ ใน n-space(หรือ Matrix ขนาด $n \times 1$) ผลคูณ $\mathbf{A}\xi$ จะเป็น Matrix ขนาด $n \times 1$ ซึ่งก็คือ Column Vector ใน n-space เช่นเดียวกัน ตามปกติแล้วทิศทางของ Vector $\mathbf{A}\xi$ จะต่างจากทิศทางของ Vector ξ อย่างไรก็ตามถ้าเราสามารถหา Vector ξ ที่ทำให้ทิศทางของ $\mathbf{A}\xi$ เหมือนกันกับทิศทางของ ξ ได้ ในกรณีนี้เรากล่าวได้ว่า Vector $\mathbf{A}\xi$ จะขนานกับ Vector ξ จากที่กล่าวมาแล้วในเรื่องของ Vector โดยที่ Vector 2 ตัวจะเท่ากันก็ต่อเมื่อมันชี้ไปในทิศทางเดียวกัน และมีขนาดเท่ากัน ดังนั้นถ้าให้ λ เป็นตัวคูณที่ทำให้ Vector $\mathbf{A}\xi$ เท่ากับ ξ เราจะได้สมการ $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$ ในกรณีเช่นนี้ เราเรียกค่า λ ว่าเป็น "*Eigenvalue*" และ Vector ξ ว่าเป็น "*Eigenvector*" ของ Matrix $\mathbf{A}$ ค่าทั้งสองเป็นคุณลักษณะที่สำคัญของ Matrix และสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการหาคำตอบทางคณิตศาสตร์หลายๆอย่างในวิศวกรรม

นิยาม 1

ให้ A เป็น Matrix ขนาด $n \times n$ ของเลขจริงหรือเลข Complex, เลขจริงหรือเลข Complex ค่า λ จะเป็นค่า Eigenvalue ก็ต่อเมื่อมี Matrix E ขนาด $n \times 1$ ที่ไม่เป็นศูนย์ ที่ทำให้ $AE = \lambda E$ และ Matrix E ดังกล่าวเราเรียก Eigenvector ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue λ นั้น

นอกจากนั้นแล้วค่า Scalar เป็นจำนวนเท่าของ Eigenvector ก็จะเป็น Eigenvector ด้วย เนื่องจาก

$$AE = \lambda E \Rightarrow A(\alpha E) = \alpha AE = \alpha(\lambda E) = \lambda(\alpha E)$$

ตัวอย่างที่ 1

จากสมการ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

เราสรุปว่า ค่า 0 เป็น Eigenvalue ของ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ เป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับ Eigenvalue 0 นอกจากนี้แล้วจำนวนเท่าที่ไม่ใช่ศูนย์ ของ $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ จะเป็น Eigenvector ด้วย

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ดังนั้นค่า 1 จะเป็น Eigenvalue และ $E = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็น Eigenvector ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue ดังกล่าว เพราะว่า $AE = 1 \cdot E = E$ นอกจากนี้แล้ว Vector $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะเป็น Eigenvector ด้วย

ค่า Eigenvalue ของ A อีกค่าหนึ่งก็คือ -1 และ Eigenvector ที่เกี่ยวข้องคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ และจะรวมถึง $\begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ -4\beta \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็น Eigenvector ของ A ที่สัมพันธ์กับค่า Eigenvalue -1 ด้วยเช่นกัน

MATLAB TUTORIAL

End of Week 3

- Download HW 2 Due Next Week
  - Chapter 1: Vector Operations
  - Chapter 2: Linear Equations
- Next week: WK 4
  - Eigenvalue/Eigenvector Continue
  - MATLAB
  - HW 3